

# VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

## 1. Autour de la loi d'une variable aléatoire

### DÉFINITION 1 (Loi d'une variable aléatoire discrète)

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète. La loi de  $X$  est la donnée de :

- $X(\Omega)$  le support de  $X$ ,
- des probabilités  $\forall k \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = k)$ .

### PROPRIÉTÉ 1

Si  $X$  est une variable aléatoire discrète alors :

- (1)  $\forall k \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = k) \geq 0$
- (2) la série (somme)  $\sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k)$  converge et vaut 1.

**Exercice 1 :** Soit  $X$  une v.a. de support  $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$  dont la loi est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = \frac{a}{k!}.$$

Déterminer la constante  $a \in \mathbb{R}$  de sorte que l'on définisse bien une loi de probabilité.

*Indication : utiliser le point (2) de la définition précédente.*

### PROPRIÉTÉ 2 (système complet d'événement associé à une variable aléatoire discrète)

Soit  $X$  une v.a. de support  $X(\Omega)$ .

Le système  $((X = k))_{k \in X(\Omega)}$  est un système complet d'événements.

En particulier, la formule des probabilités totales s'applique et pour tout événement  $B$  on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(B \cap (X = k))$$

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}_{(X=k)}(B) \times \mathbb{P}(X = k).$$

**Exercice 2 :** On dispose de trois pièces de monnaie.

- la première amène PILE à coupe sûr,
- la deuxième amène FACE à coupe sûr,
- la troisième amène PILE avec probabilité  $p \in ]0; 1[$ .

On choisit une pièce au hasard puis on lance cette pièce jusqu'à l'obtention du premier PILE.

On note  $X$  la variable aléatoire égale au numéro de la pièce choisie.

Soit  $B_n$  l'événement "le premier PILE arrive au  $n$ -ème lancer".

Déterminer  $\mathbb{P}(B_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

## 2. Espérance, moments, variance

### DÉFINITION 2 (Espérance)

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète.

On dit que  $X$  admet une espérance si la série (somme)  $\sum_{k \in X(\Omega)} k \mathbb{P}(X = k)$  converge absolument et on note  $\mathbb{E}(X)$  sa somme.

REMARQUES :

• si  $X(\Omega)$  est fini alors  $\sum_{k \in X(\Omega)} k \mathbb{P}(X = k)$  n'a aucun problème de convergence puisqu'il s'agit d'une somme finie et donc  $X$  admet une espérance.

• si  $X(\Omega)$  est infini alors  $\sum_{k \in X(\Omega)} k \mathbb{P}(X = k)$  est bien une série et la question de la convergence (absolue) se pose.

Il se peut que  $X$  n'admette pas d'espérance.

• par définition la convergence absolue de la série  $\sum_n u_n$  signifie la convergence de la série  $\sum |u_n|$ . Pour le cas d'une série à termes positifs les deux séries coïncident.

• la série  $\sum_{k \in X(\Omega)} k \mathbb{P}(X = k)$  est en général une série à termes positifs puisque  $P(X = k) \geq 0$  et en général  $X$  est à valeurs positives.

**Exercice 3 :** On reprend la v.a.  $X$  de l'exercice 1.

Montrer que  $X$  admet une espérance et la calculer.

### THÉORÈME 1.1 (Théorème de transfert)

Soit  $X$  une v.a. discrète et  $Y = g(X)$  où  $g$  est une fonction.

$Y$  admet une espérance si et seulement si la série  $\sum_{k \in X(\Omega)} g(k) \mathbb{P}(X = k)$  converge absolument et dans ce cas on a

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} g(k) \mathbb{P}(X = k).$$

**Exercice 4 :**

On reprend la v.a.  $X$  de l'exercice 1.

Montrer que  $2^X$  admet une espérance et la calculer.

*Indication : appliquer le théorème de transfert.*

**DÉFINITION 3 (Moments)**

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète.

On dit que  $X$  admet un moment d'ordre  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  si la variable  $X^\alpha$  admet une espérance et ce moment vaut  $\mathbb{E}(X^\alpha)$ .

REMARQUE : d'après le théorème de transfert,  $X$  admet un moment d'ordre  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  la série (somme)  $\sum_{k \in X(\Omega)} k^\alpha \mathbb{P}(X = k)$  converge absolument.

**Exercice 5 :** On reprend la v.a.  $X$  de l'exercice 1.

Montrer que  $X$  admet un moment d'ordre 2 et le calculer.

**THÉORÈME 1.2 (Variance)**

$X$  admet une variance si  $X$  admet un moment d'ordre 2 et de plus

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

**Exercice 6 :** On reprend la v.a. de l'exercice 1.

Montrer que  $X$  admet une espérance et la calculer.

**3. Synthèse : feuille d'exercices****Exercice 1 : Théorème de transfert**

À l'aide du théorème de transfert, calculer les espérances suivantes, en justifiant bien l'existence à chaque fois :

- |  |   |
|--|---|
| 1. $\mathbb{E}(e^X)$ où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$  | 3. $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$ où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ |
| 2. $\mathbb{E}\left(\ln\left(1 + \frac{1}{X}\right)\right)$ où $X \hookrightarrow \mathcal{U}(a, b)$ | 4. $\mathbb{E}(e^X)$ où $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ .                          |

**Exercice 2 : Loi de support fini**

Un joueur dispose d'un capital initial  $C$ . Il participe à un jeu se déroulant en  $n$  parties où, pour chaque partie, la probabilité qu'il gagne vaut  $p$ . À chaque fois qu'il gagne, son capital est doublé, et à chaque fois qu'il perd, son capital est réduit de moitié.

On note  $X$  le nombre de parties gagnées par le joueur lors du jeu et  $Y$  son capital final. On admet que  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires.

1. Reconnaître la loi de  $X$  parmi les lois usuelles. En déduire son espérance et sa variance.
2. Exprimer  $Y$  en fonction de  $X$ .
3. Déterminer  $E(Y)$  : le capital du joueur a-t-il augmenté en moyenne à l'issue des  $n$  parties ?

**Exercice 3 : Loi de support infini**

On lance une pièce amenant PILE avec probabilité  $p \in ]0; 1[$ .

On note  $X$  la variable aléatoire égale au numéro du lancer amenant pour la première fois le deuxième PILE.

1. Montrer que  $X(\Omega) = \llbracket 2; +\infty \llbracket$  et montrer que la loi de  $X$  est donnée par :  $\forall n \geq 2, \mathbb{P}(X = n) = (n-1)p^2q^n$ .
2. Vérifier que l'on a bien définie une loi de probabilité.
3. Montrer que  $X$  admet une espérance et la calculer.
4. Montrer que  $X$  admet une variance et la calculer.